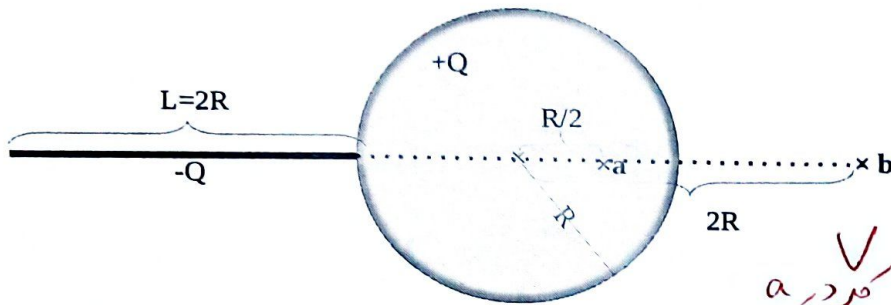


سؤال ۱) در شکل زیر بار الکتریکی $+Q$ به طور یکنواخت در حجم کره‌ی نارسا با شعاع R توزیع شده است. میله‌ی نازک نارسا با طول $L=2R$ نیز دارای بار $-Q$ است که با چگالی یکنواخت روی آن توزیع شده است. الف) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بینهایت) در مکان نقطه‌ی a که در امتداد محور x در داخل کره و به فاصله‌ی $R/2$ از مرکز کره قرار دارد محاسبه کنید. ب) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بینهایت) در مکان نقطه‌ی b که در امتداد محور x و به فاصله‌ی $2R$ از مرکز کره قرار دارد (مطابق شکل) محاسبه کنید. ب) چه میزان کار لازم است تا بار نقطه‌ای $+q$ از مکان نقطه‌ی b به مکان نقطه‌ی a منتقل شود؟



الف: $V_a = V_{\text{کره}} + V_{\text{میله}}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{کره} \\ \text{میله} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_{\text{داخل}} = \frac{\rho r}{\epsilon_0} \\ E_{\text{بیرون}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{array} \quad , \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \begin{cases} E_{\text{داخل}} = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ E_{\text{بیرون}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{کره} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{داخل}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q r^3 / R^3}{\epsilon_0} \rightarrow E_{\text{داخل}} = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \text{میله} : \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{کل}}}{\epsilon_0} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{a=R/2}^R \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{a=R/2}^R \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{a=R/2}^R + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[R^2 - \frac{1}{4} R^2 \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \xrightarrow{a=R/2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\frac{3}{4} R^2 \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{3}{4} + 1 \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{R} \\ V(b) &= \int_b^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{b=2R}^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{2R}^\infty = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

تعیین پتانسیل و از خط باردار، نقطه a و نقطه b



$$dV = k \frac{dq}{x} \quad \text{سپش خنوع با افسر خنوع در نقطه a}$$

$$V_a = \int dV = \int k \frac{dq}{x} = \frac{kQ}{rR} \int \frac{dx}{x}$$

$$V_a = \frac{kQ}{rR} \int_{x=r/R}^{x=r} \frac{dx}{x} = \frac{kQ}{rR} \ln x \Big|_{r/R}^{r}$$

$$= \frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r/R} = \frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r}$$

$$\boxed{V_a = -\frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r}} \quad \text{نقطه a: -Q}$$

$$V_b = \frac{kQ}{rR} \ln x \Big|_{x=r}^{x=rR} = \frac{kQ}{rR} \ln \frac{rR}{r}$$

$$V(a) = V + V_{\text{نقطه a}} = -\frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r} + kQ \frac{1}{rR} = \frac{kQ}{rR} \left[\frac{1}{r} - \ln \frac{r}{r} \right]$$

$$V(b) = -\frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r} + \frac{kQ}{rR} = \frac{kQ}{rR} \left[1 - \ln \frac{r}{r} \right]$$

$$W_{\text{ext}} = q \Delta V = q (V_a - V_b)$$

$$= q \left[\frac{kQ}{rR} \times \frac{r}{r} + \frac{kQ}{rR} \ln \frac{r}{r} \right] = \frac{kqQ}{rR} \left[\frac{r}{r} + \ln \frac{r}{r} \right]$$

سؤال ۲) خازن تختی از دو صفحه فلزی هریک به مساحت A تشکیل شده که در فاصله d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. خازن را به باتری با اختلاف پتانسیل V وصل کرده و پس از اینکه کاملاً باردار شد، از باتری جدا می‌کنیم. الف) انرژی ذخیره شده در خازن را بر حسب پارامترهای مسئله بدست آورید.

نام نراری می‌کنیم $V \equiv V_0$

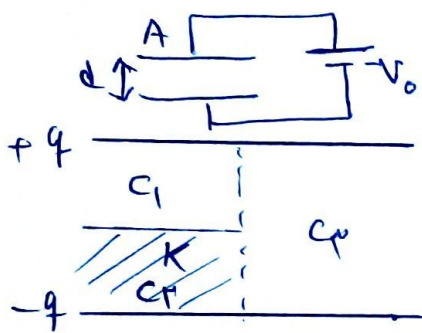
حال بره دی الکتریکی با ثابت k ، ضخامت $d/2$ ، و مساحت $A/2$ را مطابق شکل در داخل خازن باردار شده قسمت الف قرار می‌دهیم.

ب) ظرفیت خازن پس از قرار گرفتن دی الکتریک را بر حسب پارامترهای مسئله بدست آورید.

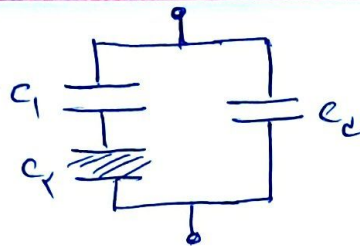
ج) انرژی ذخیره شده در خازن در وضعیت جدید چقدر است؟

د) اندازه کار انجام شده برای قرار گرفتن دی الکتریک در خازن چقدر است؟

ه) هنگام ورود دی الکتریک به خازن، آیا بره توسط خازن جذب می‌شود یا دفع می‌گردد؟



$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \frac{A}{d}) V_0^2$$



$$C_1 = \epsilon_0 \frac{A/2}{d/2} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$C_2 = \epsilon_0 k \frac{A/2}{d/2} = \frac{\epsilon_0 k A}{d}$$

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 A/2}{d/2} = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C = C_{12} + C_p = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{d} \times \frac{\epsilon_0 k A}{d}}{\frac{\epsilon_0 A}{d} + \frac{\epsilon_0 k A}{d}} + \frac{\epsilon_0 A}{2d} = \frac{\epsilon_0 A k}{1+k} + \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$= \frac{\epsilon_0 A}{d} \left[\frac{k}{1+k} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left[\frac{3k+1}{2(k+1)} \right]$$

نیم ظرفیت کل خازن
در حالت اول

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

در حالت دوم

$$q = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} V_0$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\frac{\epsilon_0 A}{d} V_0)^2}{\frac{\epsilon_0 A}{d} \left[\frac{3k+1}{2(k+1)} \right]} = \frac{\frac{\epsilon_0 A}{d} V_0^2}{\frac{3k+1}{k+1}} = \frac{\epsilon_0 A V_0^2 (k+1)}{d (3k+1)}$$

کار انجام شده در بارش

$$W_{ext} = U - U_0 = \frac{\epsilon_0 A V_0^2 (k+1)}{d (3k+1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A V_0^2}{d} \right)$$

$$= \frac{\epsilon_0 A V_0^2}{d} \left[\frac{k+1}{3k+1} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\epsilon_0 A V_0^2}{d} \left[\frac{1-k}{2(3k+1)} \right]$$

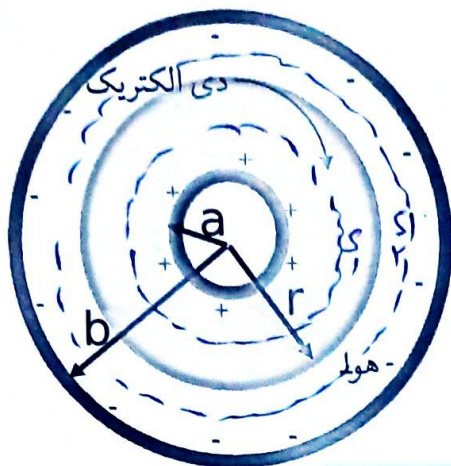
نتیجه منفی است پس بار را دفع می‌کند.

سؤال ۳) مطابق شکل زیر، یک خازن کروی باردار به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی $b=3a$ ، صفحه داخلی با بار $+q$ و صفحه خارجی با بار $-q$ را در نظر بگیرید. فضای بین دو کره از شعاع a تا r ؛ $(a < r < b)$ ؛ با ماده ای دی الکتریک K ضریب پر شده است و بقیه فضای خازن، خالی است.

الف. اختلاف پتانسیل بین دو صفحه خازن را به دست آورید.

ب. ظرفیت خازن را به دست آورید.

ج. شعاع r را چنان به دست آورید (بر حسب a) تا یک چهارم انرژی کل خازن در ناحیه ی با ضریب دی الکتریک K قرار گیرد. در کلیه قسمت های مساله، $K=3$ در نظر بگیرید.



$$\Delta V = |V_b - V_a| = \left| - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \right|$$

الف:

در r در سطح گادی کروی فرضی

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0 K} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0 K} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 K r^2}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_r^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^r \frac{q}{4\pi \epsilon_0 K r^2} dr + \int_r^b \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 K} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_a^r + \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^b = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 K} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\xrightarrow[b=3a]{K=3} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) + \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{3a} \right) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \frac{2}{3} = \frac{q}{6\pi \epsilon_0 r}$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = 6\pi \epsilon_0 r$$

ب:

$$U' = \frac{1}{K} U \quad \text{انرژی در ناحیه ی با ضریب دی الکتریک K}$$

$$U' = \frac{1}{K} \frac{q^2}{C}, \quad C' = \frac{4\pi \epsilon_0 K r a}{r-a}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

ج:

$$\Rightarrow \frac{1}{K} \frac{q^2}{C'} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) \Rightarrow K C = C'$$

$$K \times 6\pi \epsilon_0 r = \frac{4\pi \epsilon_0 K r a}{r-a} \rightarrow r = \frac{3a}{r-a}$$

$$r = \frac{3a}{r-a} \rightarrow \boxed{r = \frac{3}{2} a}$$